Формулировка: Докажем, что сумма квадратов площадей 3-х прямоугольных треугольников, имеющих общую вершину при прямых углах и являющихся гранями тетраэдра равна квадрату площади 4-ой грани этого тетраэдра.

$S^2 = (S_1)^2 + (S_2)^2 + (S_3)^2$

Док-во:

1)

$S_1=ac/2$

$S_2=ab/2$

$S_3=bc/2$

$(S_1)^2 + (S_2)^2 +(S_3)^2=(a^2c^2+a^2b^2+b^2c^2)/4$

2)

$y^2=AC^2=a^2+b^2$

$z^2=CB^2=a^2+c^2$

$x^2=AB^2=b^2+c^2$

3)

выведем раскрытый вариант формулы Герона

$p=(x+y+z)/2$

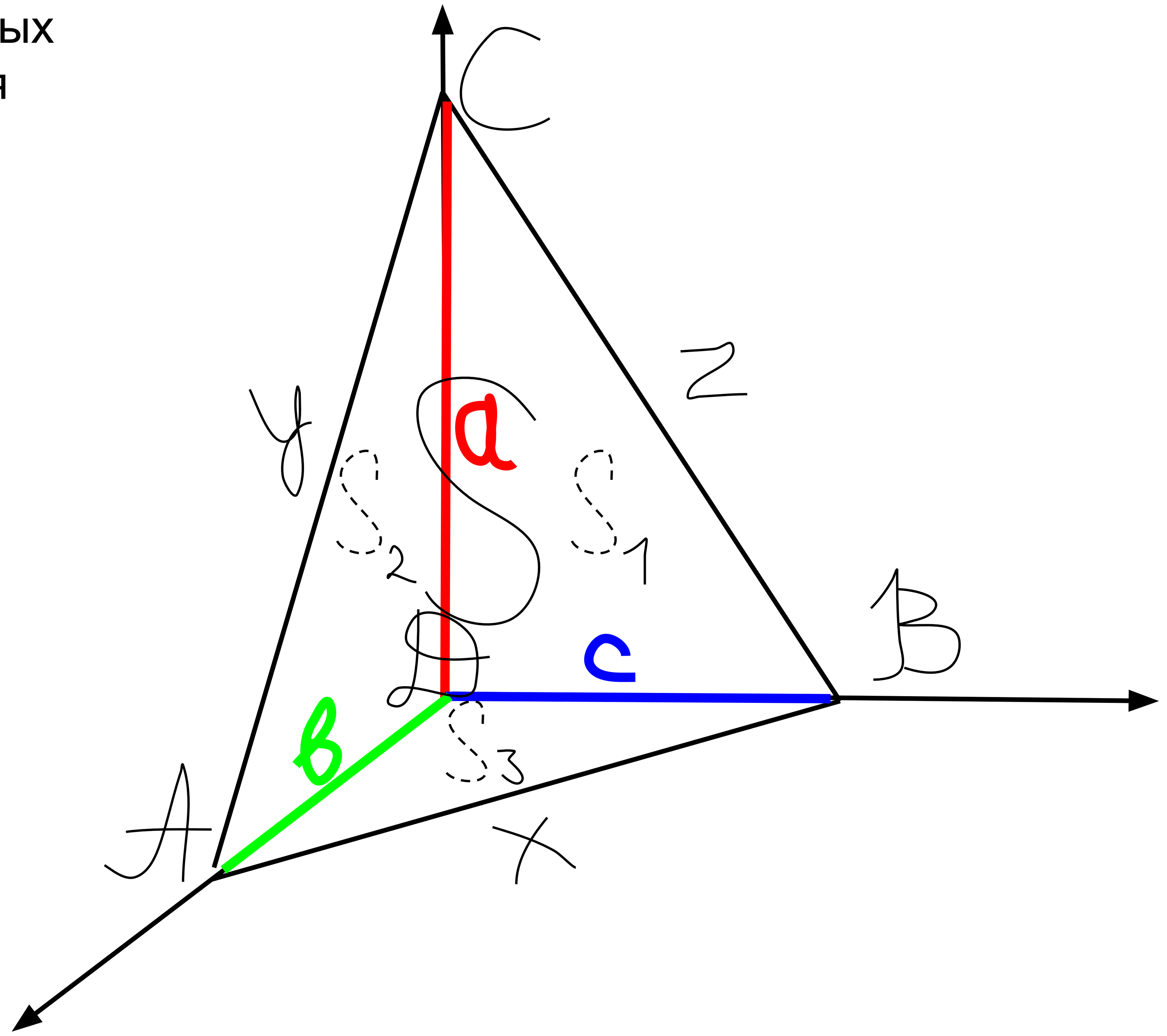
$S^2=p(p-x)(p-y)(p-z)=(2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-x^4-y^4-z^4)/16$

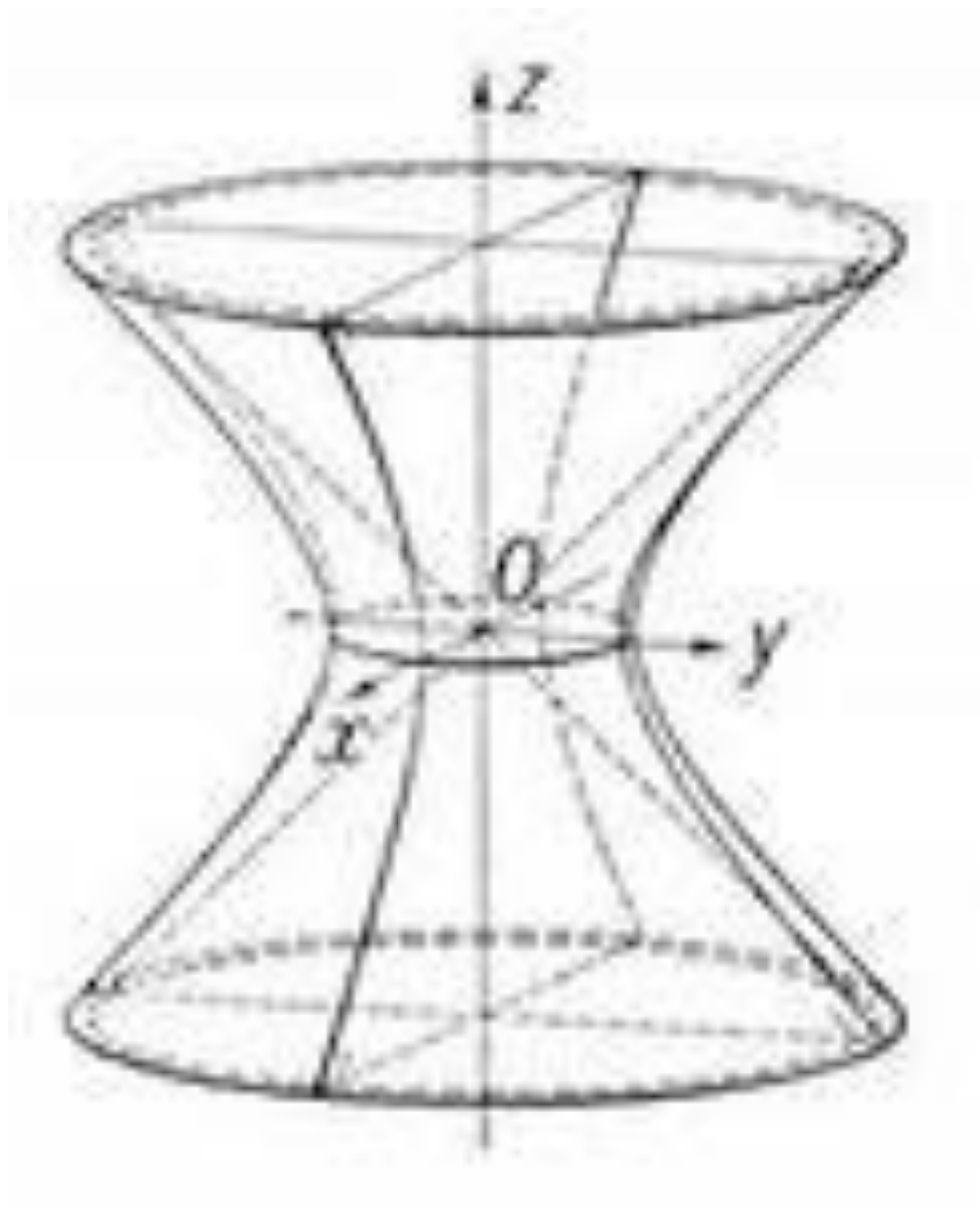
4)

подсчитаем площадь тр-ка ABC по формуле Герона

$S^2=(2AB^2*AC^2+2AB^2*BC^2+2AC^2*BC^2 - AB^4 - AC^4 - BC^4)/16=$

= подставляем из пункта 2) = … $=(a^2c^2+a^2b^2+b^2c^2)/4$





Гиперболическая геометрия

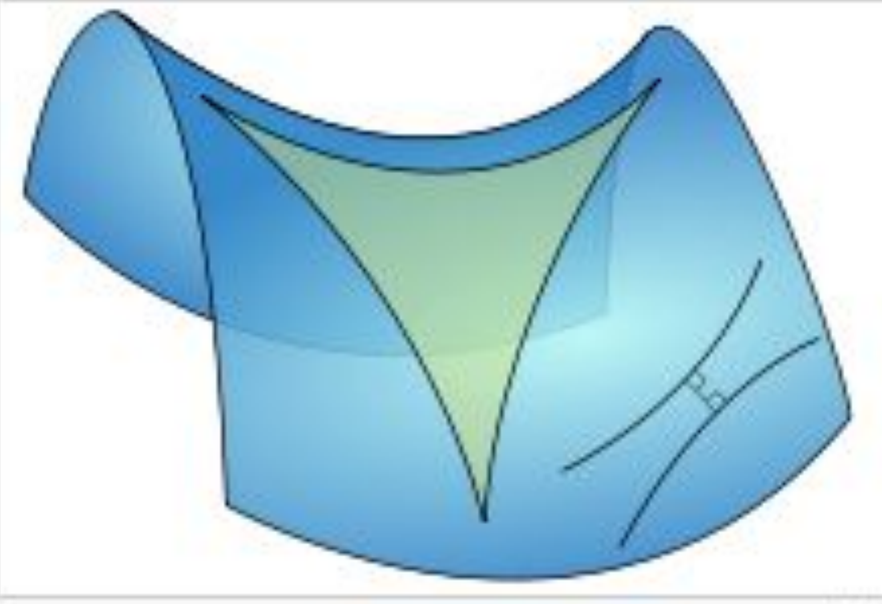
Для прямоугольного треугольника в гиперболической геометрии со сторонами *a*, *b*, *c*, если сторона *c* расположена напротив прямого угла, соотношение между сторонами будет такое[25]

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$$

где ch — гиперболический косинус[26]. Эта формула является частным случаем гиперболической теоремы косинусов, которая справедлива для всех треугольников:[27]

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \cos\gamma ,$$

где γ — это угол, вершина которого противоположна стороне *c*.



Гиперболический треугольник

Используя ряд Тейлора для гиперболического косинуса $\operatorname{ch} x \approx 1 + x^2/2$, можно доказать, что если гиперболический треугольник уменьшается (то есть, когда *a*, *b*, и *c* приближаются к нулю), то гиперболические соотношение в прямоугольном треугольнике приближаются к теореме Пифагора.